Successioni

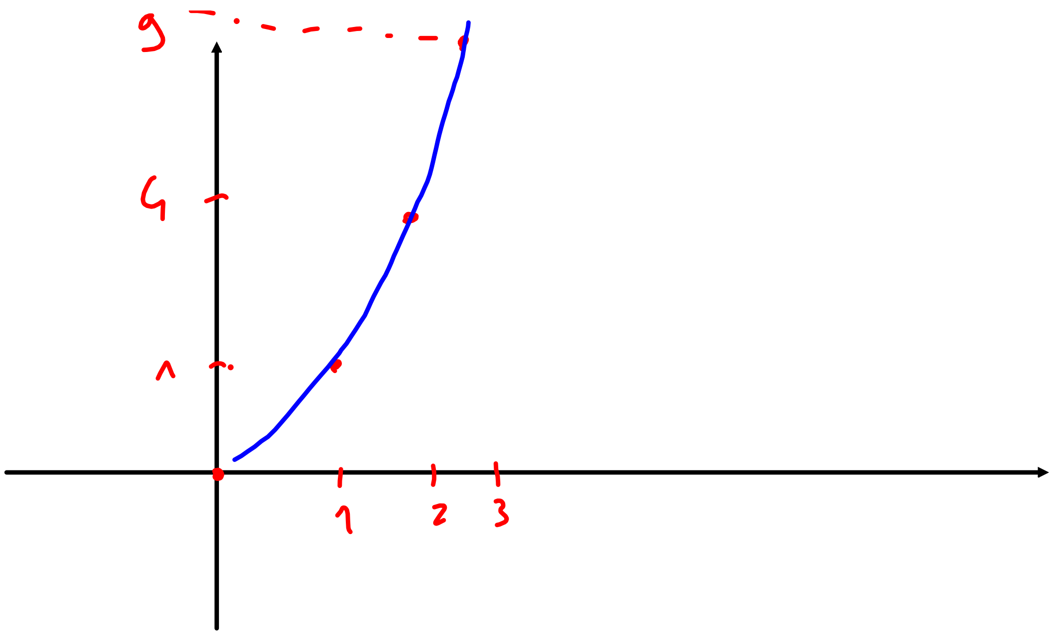
Def.: Una funzione che ha come dominio una semiretta di $\mathbb{N}$ si dice successione.

S = semiretta di $\mathbb{N}$

$$S = \{ n : \mathbb{N} : n \geq n_0 \}$$

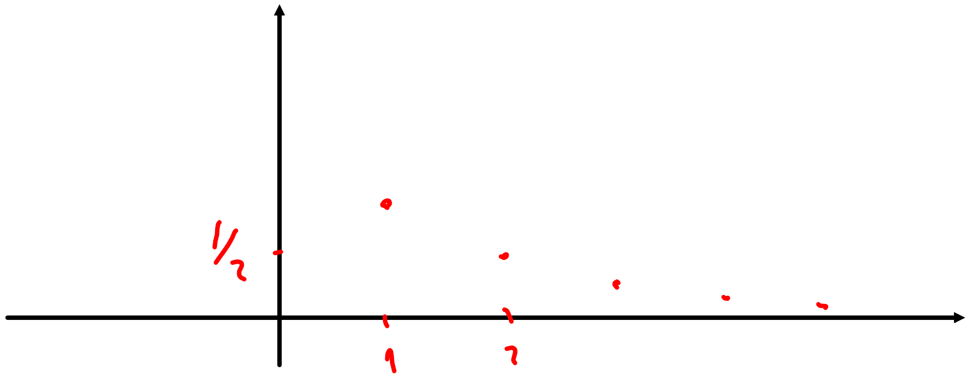
$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = n^2 \qquad S = \mathbb{N}$$


9
4
1
1
2
3

Es: $S = \{ n \geq 1 \}$

$f(n) = \frac{1}{n}$



Notazione

$a : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$a(n)$

invece di scrivere $a(n)$

scriviamo a_n

Es: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_7 = \frac{1}{7}$

Per indicare tutta la successione si usa il simbolo

$$\{a_n\}_n \quad \text{oppure} \quad \{a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \{a_n\}_{n\in S}$$

intendendo

$$\{a_n : n\in\mathbb{N}\},\ \{a_n : n\in S\}$$

Es:

$$a_n = \frac{1}{n-5}$$

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 6 \}$$

non è ammesso un dominio del tipo $S = \{ n \in \mathbb{N} : n \neq 5 \}$ perché S non è una semiretta

Limite di una successione.

L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Ha senso fare il limite solo a $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

se $\forall\, U$ intorno di ℓ

$\exists\, V$ intorno di $+\infty$ t.c.

se $n \in V \cap S \Rightarrow a_n \in U$.

V intorno di $+\infty$ è del

tipo $V = (a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

quindi $V \cap S$ è una semiretta di $\mathbb{N}$, cioè un insieme del tipo

$$\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \}$$

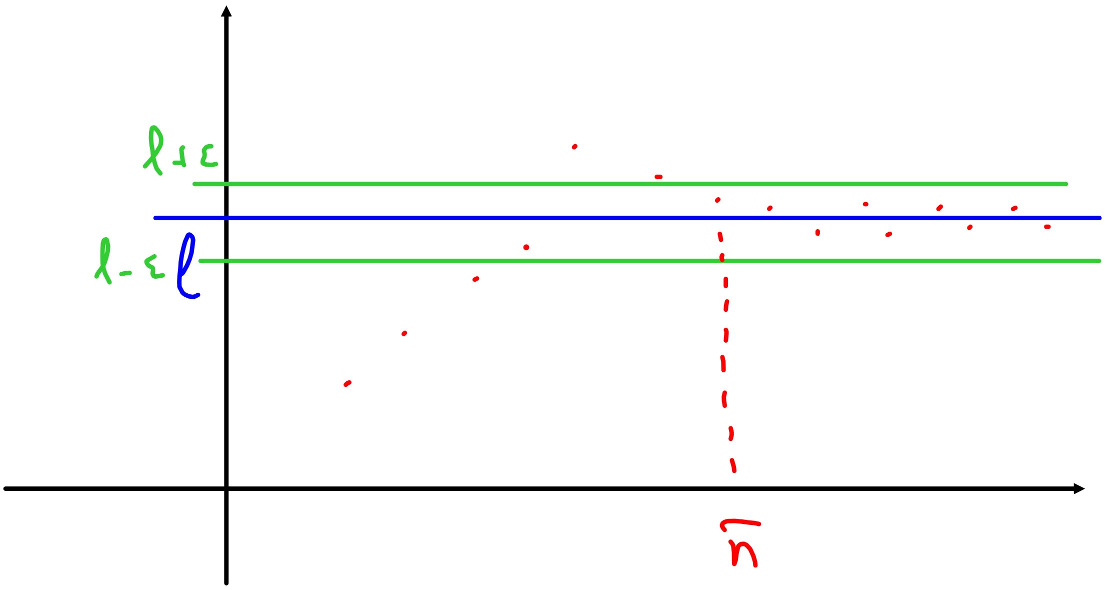
allora la definizione di limite diventa

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se

$\forall\, U$ intorno di l $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$

t.c. se $n \geq \bar{n}$ allora

$a_n \in U$.



ℓ+ε
ℓ
ℓ-ε
$\bar{n}$

Se un predicato $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$ è vero $\forall\, n \geq \bar{n}$ si dice che $P(n)$ è vero <u>definitivamente</u>

Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se

$\forall\, V$ intorno di l,

$a_n \in V$ definitivamente.

Sottosuccessioni estratte.

Data $a_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$

se prendo una successione

$k_n : \mathbb{N} \to S$

posso considerare la composizione

$a \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

se k_n è strettamente crescente

$a \circ k$ si dice sottosuccess.

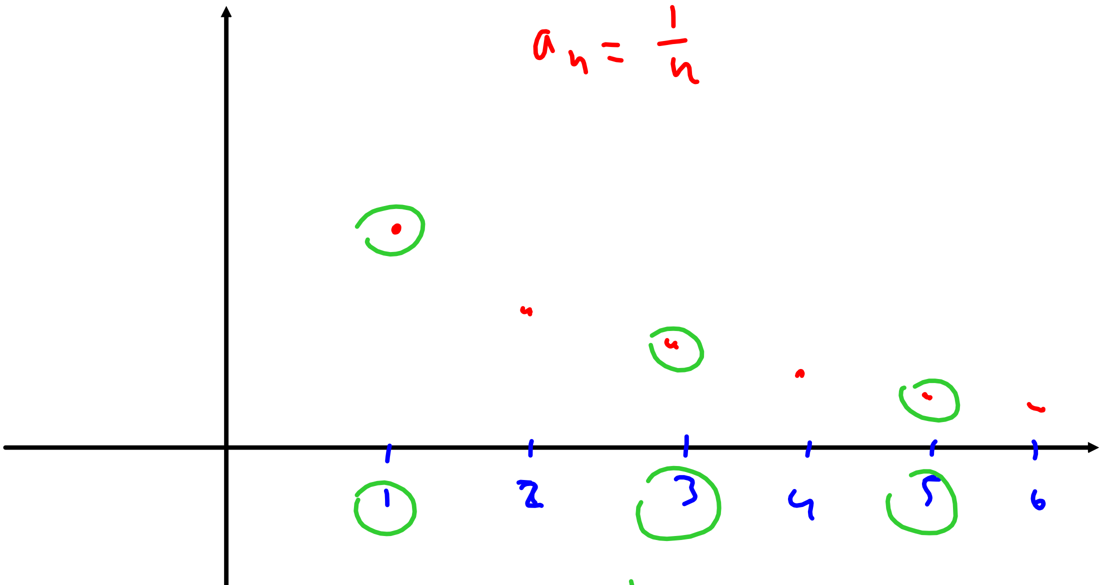
estratta da $\{a_n\}$.

Es: $a_n = \frac{1}{n}$

$k_n = 2n+1$

$(a \circ k)(n) = a_{k_n} = a_{2n+1} =$

$= \frac{1}{2n+1}$



Seleziono solo i termini dispari

Teorema: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

se e solo se

$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = l$ per ogni

sottosuccessione estratta da

$\{a_n\}$.

È utile per dimostrare che il limite non esiste.

<u>Es</u>: $a_n = (-1)^n$

consideriamo l'estratto pari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

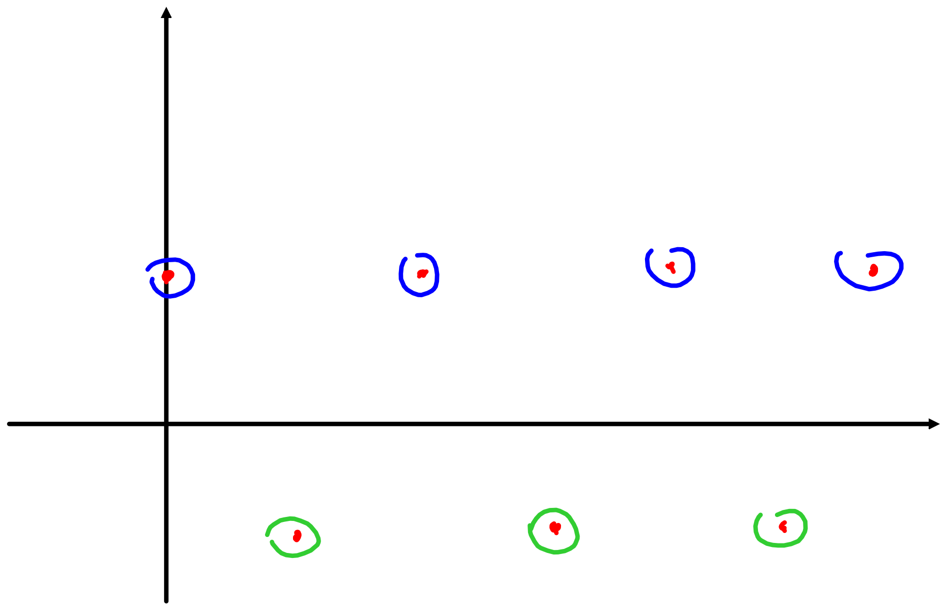
Se invece prendo

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)(-1)^{2n} = -1$$

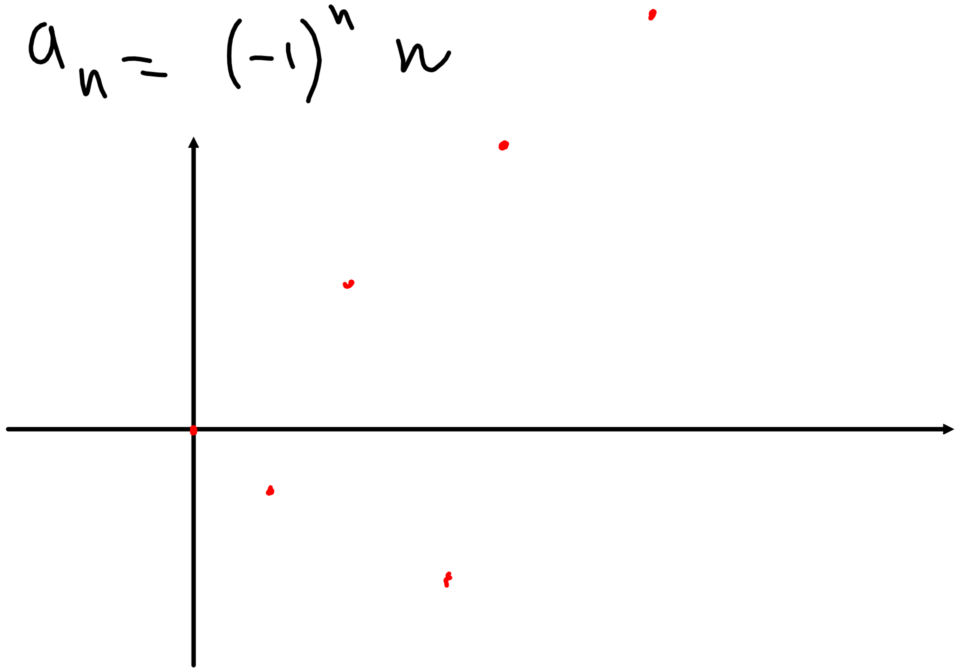
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$$

i due limiti sono diversi

quindi $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$.



$$a_n = (-1)^n\, n$$



$$\{a_n\} = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots\}$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} 2n = 2n \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2n+1) = -(2n+1) \to -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Valgono gli stessi teoremi che valgono per i limiti di funzioni.

Es: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = l+m$.

se $l+m$ ha senso.

valgono permanenza del segno
teorema dei Carabinieri,
teorema del confronto.

Es: Teorema di confronto:

se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l$

e $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = m$

e se $a_n \leq b_n$ definitivamente
allora $l \leq m$.

Monotonia.

$\{a_n\}$ si dice debolmente crescente se $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ risulta

$a_n \leq a_m$.

Oss: $\{a_n\}$ è debolmente crescente se e solo se

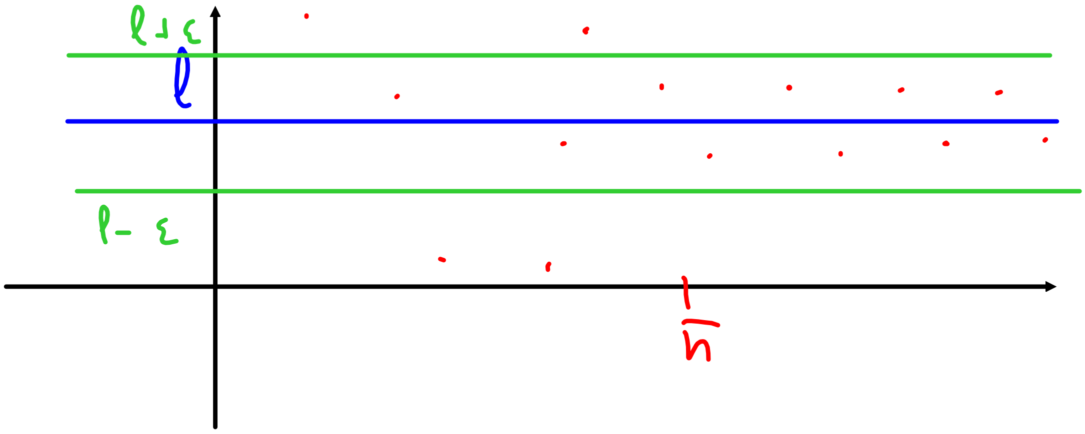
$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n.$$

dim: se $n < m$ allora

$$a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots a_{m-1} \leq a_m.$$

Oss: Ogni successione convergente è limitata.

che ha limite finito.

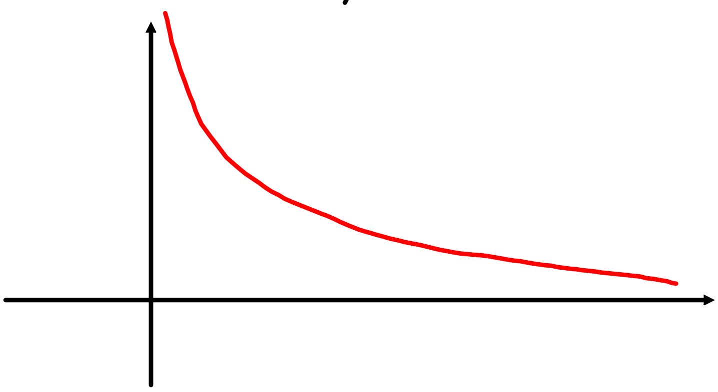


Differenza con le funzioni

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$ è convergente all'∞

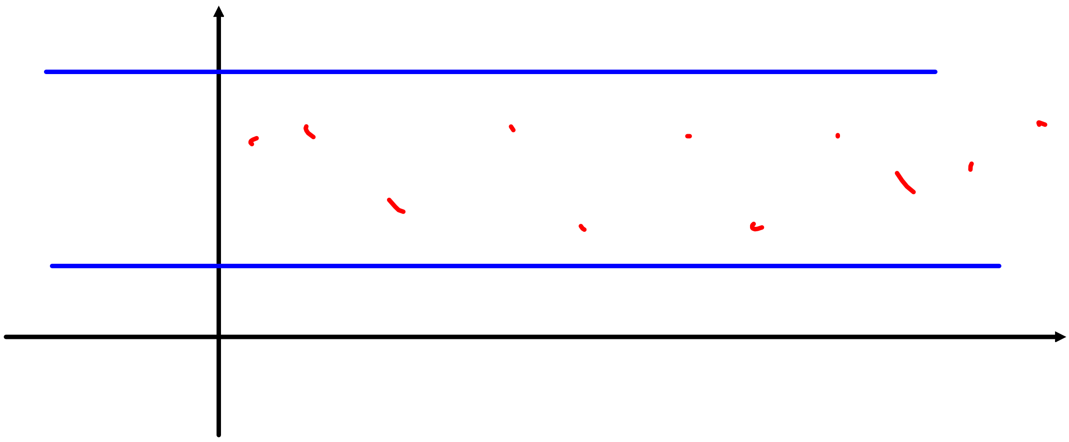
ma f non è limitata perché $\sup f = +\infty$

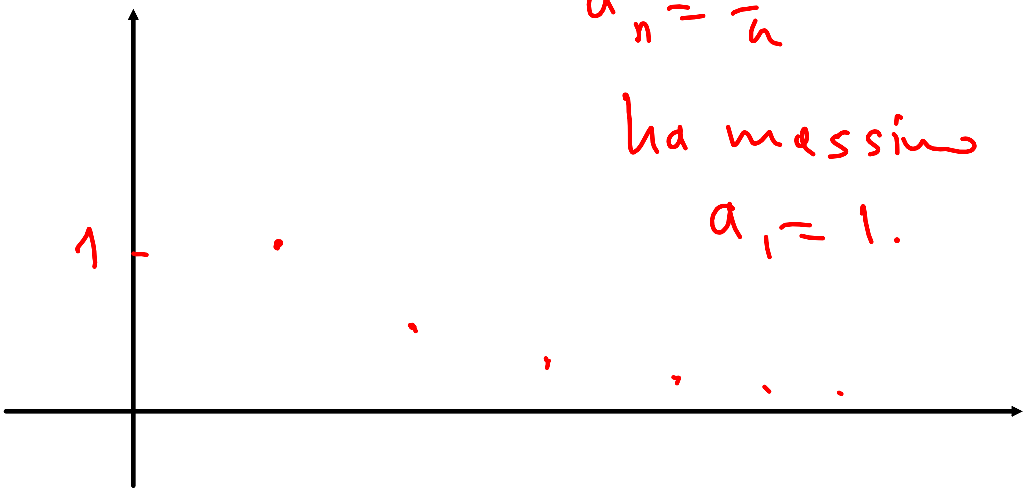


<u>Teorema</u>: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora $\{a_n\}$ ha minimo

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ allora $\{a_n\}$ ha massimo.

Domanda: Se $\{a_n\}$ è limitata $\Rightarrow$ ha massimo e minimo?



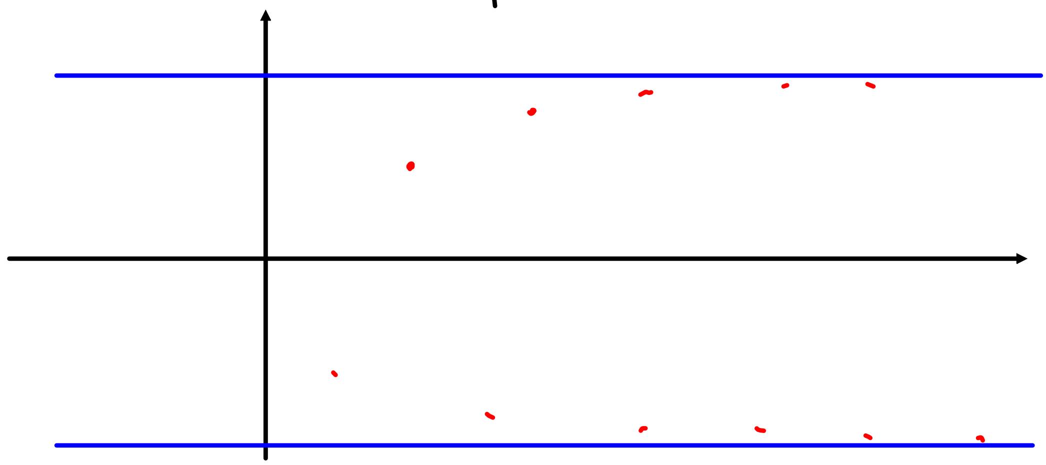


$a_n = \frac{1}{n}$

ha massimo

$a_1 = 1.$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(-1)^n$$



$\{a_n\}$ è limitata infatti

$$|a_n| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)(-1)^n\right| =$$

$$\left|1-\frac{1}{n}\right|\left|(-1)^n\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1 \leq 1$$

$$-1 \leq a_n \leq 1$$

$\sup a_n = ? = 1$ perché?

$a_{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \longrightarrow 1$

$\Longrightarrow \sup a_n = 1.$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\Downarrow$

$\inf a_n = -1 \qquad\qquad -1$

se esistesse max a_n allora

sarebbe $\quad a_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$

per un certo n

ma questo è falso.

$\{a_n\}$ non ha né max né

minimo.

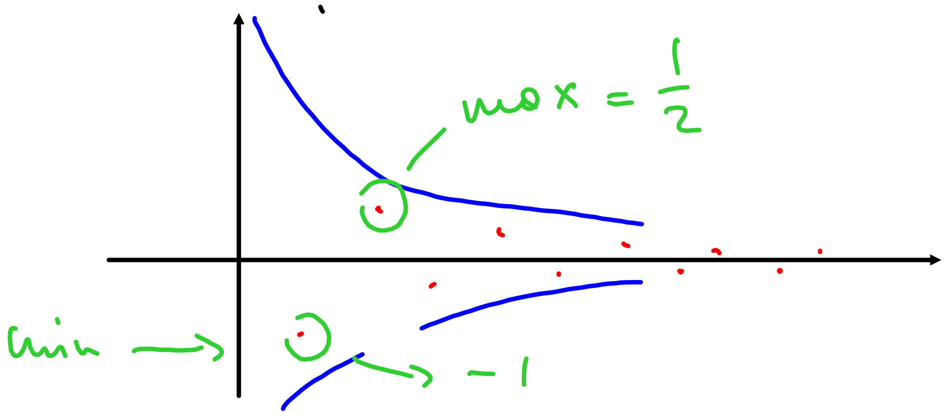
Es: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

limitato

Es: $\dfrac{(-1)^n}{n} = a_n$ ha max e min?



Oss: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ finito e $\exists\, \bar{n}: a_{\bar{n}} \geq l$ allora $\{a_n\}$ ha massimo

Se $\exists\, \bar{n}: a_{\bar{n}} \leq l \Rightarrow \{a_n\}$ ha minimo.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

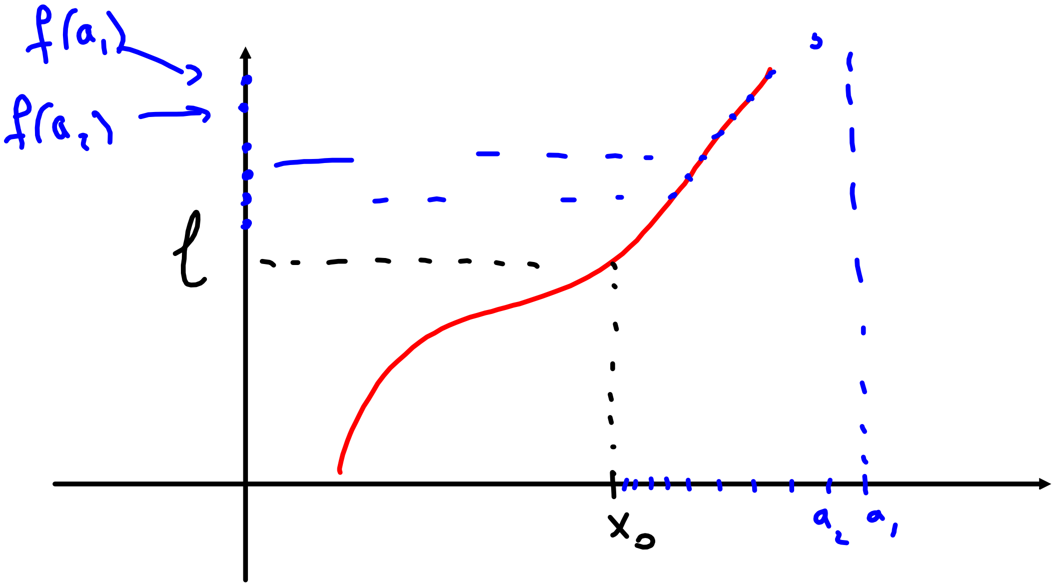
$f : A \to \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$ se e solo se

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l \quad \forall \{a_n\}$$

t.c. $$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$ e

$a_n \neq x_0$ definitivamente.



f(a1)
f(a2)
ℓ
x0
a2
a1

È utile per dimostrare che un limite non esiste.

Es: $\lim_{x \to \infty} \sin x$

Scelgo una successione

$a_n = n\pi$

$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$$

ora scelgo

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

anche $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Allora $\nexists \lim_{x \to \infty} \sin x$